以上的证明如下. 利用 $1/(\zeta - z)$ 围绕 z_0 为圆心的几何级数, 构造

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

将上式带入柯西公式有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\imath}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_C \frac{f(\zeta)(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\imath}\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k 2\pi\imath\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \end{aligned} \tag{1.100}$$

不难证明泰勒展开的唯一性.

以下是一个重要推论. 若 $f(z), g(z)$ 在区域 R 解析, 且在某些子区域 $S \subset R$ 有 $f(z) = g(z)$, 那么全区域 R 内都有 $f(z) = g(z)$. 该证明可通过构造 $h(z) = f(z) - g(z)$ 然后利用该式在区域 R 内任意一点的的泰勒展开进行系数比较, 可得 $h(z)$ 在全区域内为零.

例题 1.15 在 $z_0 = 1$ 的邻域上将 $f(z) = \ln z$ 进行泰勒展开.

解 首先,$f(z) = \ln z$ 的支点为 $0, \infty$. 这里的展开中心为 $z_0 = 1$ 非支点, 各个单值分支互相独立. 根据泰勒展开公式, 我们需要将各个系数计算出来.

$$\begin{aligned} &f(z) = \ln z, && f(1) = \ln 1 = n2\pi\imath \quad (n \text{ 为整数}); \\ &f'(z) = \tfrac{1}{z}, && f'(1) = +1; \\ &f''(z) = -\tfrac{1!}{z^2}, && f''(1) = -1!; \\ &f^{(3)}(z) = \tfrac{2!}{z^3}, && f^{(3)}(1) = +2!; \\ &f^{(4)}(z) = -\tfrac{3!}{z^4}, && f^{(4)}(1) = -3!; \\ &\dots && \dots \end{aligned}$$

于是, 可以得到

$$\ln z = 2n\pi\imath + (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4}\cdots$$

按照比值判定法, 该级数的收敛半径为 1, 需附加上 $|z-1| < 1$ 这个收敛条件. 我们称 $n = 0$ 的单值分支为 $\ln z$ 的主值.

我们对级数展开并不总是非要利用这样的展开公式取求得每一个展开系数, 有时通过级数相乘法或待定系数法可以求解, 课堂上分别举了两个例子

$$\frac{1}{1 - 3z + 2z^2}$$

和

$$\tan z$$

在 $z = 0$ 处的泰勒展开.

目前为止, 泰勒级数的展开的前提条件为区域内解析. 然而, 如果 $f(z)$ 在区域内 $z = z_0$ 的有奇点, 那么泰勒展开就无法进行. 假设 $f(z)$ 仅在 z_0 有一 p 阶**极点** (pole), 其他区域均解析, 我们有 $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ 在区域内解析. 因此, 我们可以在 z_0 处进行泰勒展开

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k. \tag{1.101}$$

于是, 我们可以将 $f(z)$ 表示为

$$f(z) = a_{-p}(z-z_0)^{-p} + \cdots a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{1.102}$$

作为泰勒级数的延伸, 这样的级数我们称为**洛朗级数** (Laurent series). 比较展开系数, 不难得到 $a_k = b_{k+p}$,

$$a_k = b_{k+p} = \frac{1}{2\pi\imath}\oint\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1+p}}d\zeta = \frac{1}{2\pi\imath}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta \tag{1.103}$$

注意: 尽管含 $z-z_0$ 的负幂项,z_0 可能也可能不是函数 $f(z)$ 的奇点, 如 $f(z)=1/(z^2-1)$ 的洛朗级数展开为

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}\cdots,$$

包含了无数多负幂项, 但展开中心 $z=0$ 本身却不是函数的奇点, 函数的奇点在 $z=\pm1$ 处. 此外注意, 虽然洛朗级数展开的系数同泰勒展开的系数公式相同但不论 z_0 是否为 $f(z)$ 的奇点,

$$a_k \neq \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

如果 z_0 是奇点,$f^{(k)}(z_0)$ 不存在; 若 z_0 不是奇点, $f^{(k)}(z_0)$ 存在, 上式成立的条件是在以 C 为边界的区域内解析, 而现在该区域 (环状) 内是有奇点的 (否则就不需要进行洛朗展开了).

洛朗级数所有幂次 $k\geq 0$ 的项称为**解析部** (analytic part), 其余由 $z-z_0$ 负幂次项称为**主部** (principal part). 解析部的收敛半径记为 R_1. 如果主部收敛, 那么对 $|(z-z_0)^{-1}|$ 比某半径小的圆内收敛. 若该圆半径为 $1/R_2$, 可以知当 $|z-z_0|>R_2$, 主部收敛. 如果 $R_2<R_1$ 那么级数在环域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 内绝对一致收敛, 级数求和为解析函数, 级数可以逐项求导. 该环域称为**收敛环**. 如果 $R_2>R_1$ 那么该级数发散.

例题 1.16 在 $z_0=0$ 的邻域上将 $e^{1/z}$ 展开.

解 指数 e^z 的泰勒展开为

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k = 1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots \quad (|z|<\infty),$$

替换 z 成 $1/z$ 得到

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k = 1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots \quad (|\frac{1}{z}|<\infty),$$

即有

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}z^k(|z|>0).$$

1.4.5 奇点的分类

利用函数 $f(z)$ 的在 $z=z_0$ 处的洛朗级数展开, 我们可以刻画函数在此处的行为. 容易知道, 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析, 那么所有负幂项系数为零, 即 $a_k=0,\ k<0$. 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处非解析, 那么两种情况会出现.

1. 能找到整数 p 使得 $a_{-p}\neq 0$, 对所有 $k>0$ 有 $a_{-p-k}=0$.
2. 无法找到上述最小的 $-p$.

对于第一种情况,$f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有 p 阶**极点**. a_{-1} 称为 $f(z)$ 在极点 $z=z_0$ 处的**留数** (residue), 记为 Res $f(z_0)$. 对于第二种情况, 如果有无穷多负幂项, 我们称之为**本性奇点** (essential singularity).

例题 1.17 找出

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)^3}$$

在 $z=0$ 和 $z=2$ 处的洛朗级数展开, 并验证 $z=0$ 时一阶极点,$z=2$ 是三阶极点, 并找出两个极点的留数.

解 对于极点 $z=0$ 处的洛朗级数展开, 我们可以利用 $(1-\alpha z)^n$ 的泰勒展开. 有

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{8z(1-z/2)^3}\\&=-\frac{1}{8z}\left[1+(-3)(-\frac{z}{2})+\frac{(-3)(-4)}{2!}\left(-\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right]\\&=-\frac{1}{8z}-\frac{3}{16}-\frac{3z}{16}+\cdots\end{aligned}$$

由定义可知,$z=0$ 为一阶奇点, 留数为 $-1/8$. 对于 $z=2$ 的洛朗级数展开, 我们将函数写成

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-2)^3}\frac{1}{z-2+2} \\
&= \frac{1}{2(z-2)^3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} \\
&= \frac{1}{2(z-2)^3}\left[1-\left(\frac{z-2}{2}\right)+\left(\frac{z-2}{2}\right)^2-\left(\frac{z-2}{2}\right)^3\cdots\right] \\
&= \frac{1}{2(z-2)^3}-\frac{1}{4(z-2)^2}+\frac{1}{8(z-2)}-\frac{1}{16}+\cdots
\end{aligned}$$

由定义可知,$z=2$ 为三阶极点, 留数为 $1/8$.

1.5 留数定理及应用

1.5.1 留数定理

柯西定理指出, 若被积函数 $f(z)$ 在回路 ℓ 所围区域是解析的, 则回路积分 $\oint_\ell f(z)dz$ 为零. 下面讨论所围区域包含奇点的情况. 假设一个含有 m 阶极点 $z=z_0$ 的函数, 它可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

取圆环内包含 z_0 的闭合回路, 由柯西定理可知, 回路积分 $\oint_\ell f(z)dz=\oint_C f(z)dz$, 将洛朗展开带入逐项积分, 可得

$$\oint_\ell f(z)dz=\sum_{k=-m}^{\infty}\oint_C(z-z_0)^k dz,$$

由前面例题可知, 只有 a_{-1} 项不为零, 其他项为零. 而 a_{-1} 项的积分为 $2\pi\imath$. 因此, 我们得到

$$\oint_\ell f(z)dz=2\pi\imath a_{-1}. \tag{1.104}$$

又因为 a_{-1} 为函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的留数, 记为 $\mathrm{Res}\ f(z_0)$. 于是有

$$\oint_\ell f(z)dz=2\pi\imath \mathrm{Res}\ f(z_0). \tag{1.105}$$

扩展到多个奇点的情况, 不难得到

$$\oint_\ell f(z)dz=2\pi\imath\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\ f(z_j). \tag{1.106}$$

上式为**留数定理**的数学表达式, 即回路积分可以写成被积函数在回路所围区域上各个奇点的留数之和.

下面介绍一下计算留数的一种方法. 通常, 我们并不总是要将一个函数展开为洛朗级数来找出 a_{-1} 的值. 如果 $f(z)$ 有 n 阶极点 z_0, 那么有

$$(z-z_0)^n f(z)=a_{-n}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+a_0(z-z_0)^n+\cdots. \tag{1.107}$$

不断求导后可以验证

$$a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)\right] \tag{1.108}$$

此外, 另外一种方法也比较常见. 若 $f(z)$ 可以表示为 $P(z)/Q(z)$ 的特殊形式, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 点解析, z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点. $P(z_0)\neq 0$, 从而 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, 则

$$\mathrm{Res}\ f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \tag{1.109}$$

上式最后一步应用了罗毕达法则. 下面给出一些计算留数的例子.

例题 1.18 计算留数.

解

1. $\frac{1}{\sin z}$ 在 $z=0$ 处的留数为 $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$.

2. $\frac{\ln z}{z^2+4}$ 在 $z=2e^{\imath\frac{1}{2}\pi}$ 处的留数为 $\lim_{z\to 2e^{\imath\frac{1}{2}\pi}}\frac{(z-2e^{\imath\frac{1}{2}\pi})\ln z}{z^2+4}=\frac{\ln 2+\imath\frac{1}{2}\pi}{4\imath}=\frac{\pi}{8}-\frac{\imath\ln 2}{4}$.
3. $f(z)=\frac{\cot\pi z}{z(z+2)}$ 在 $z=0$ 处的留数.
$$f(z)=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{\pi z}+O(z)\right]\frac{1}{2}\left[1-\frac{z}{2}+O(z^2)\right]$$
可以得到该函数的留数为 $-1/(4\pi)$.
4. $f(z)=\frac{1}{z^n-1}$ 在 $z=1$ 处的留数可通过如下方法. 可知
$$f(z)=\frac{1}{z^n-1}=\frac{1}{(z-1)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1\right)},$$
因此, 有
$$\begin{aligned}\text{Res }f(1)&=\lim_{z\to1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1\right)}\right]\\&=\lim_{z\to1}\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$
或者用
$$\lim_{z\to1}\left[\frac{1}{(z^n-1)'}\right]=\lim_{z\to1}\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$
因此, 此函数在 $z=1$ 处的留数为 $1/n$.

留数的概念还可以帮助求解裂项分解时的待定系数, 如
$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3},$$
中求待定系数 A,B,C 这样的只包含一阶极点的问题. 不难看出 A,B,C 分别对应 $f(z)$ 在 $z=1,2,3$ 的留数. 于是有
$$\begin{aligned}A&=\text{Res }f(1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\frac{1}{2},\\B&=\text{Res }f(2)=\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=-1,\\C&=\text{Res }f(3)=\lim_{z\to3}(z-3)f(z)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
对于高阶极点的情况, 可以类似处理.
$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}=\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-2}+\frac{D}{z-3}$$
注意 A 的处理
$$\begin{aligned}A&=\text{Res }(z-1)f(z)|_{z=1}=\frac{1}{2},\\B&=\text{Res }f(1)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2f(z)\right]=\frac{3}{4},\\C&=\text{Res }f(2)=\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=-1,\\D&=\text{Res }f(3)=\lim_{z\to3}(z-3)f(z)=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

1.5.2 留数定理应用

对于实变函数的定积分, 我们已经学会了一些积分技巧, 如变量代换, 分部积分等. 这一章节我们将介绍利用留数定理的积分技巧, 并介绍以物理学家 Richard P. Feynman 命名的特殊技巧.

1.5.2.1 三角函数的积分

考虑积分区间为 $[0,2\pi]$, 被积函数为三角函数有理式的积分
$$\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)dx,\tag{1.110}$$

当实变数 x 从 0 变到 2π 时, 复变数 $z=e^{\imath x}$ 从 $z=1$ 出发沿单位圆 $|z|=1$ 逆时针走一圈又回到 $z=1$, 实变定积分化为复变回路积分, 就可以应用留数定理了. 至于实变定积分里的 $\cos x, \sin x$ 和 dx, 作如下变换:

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right), \quad \sin x=\frac{1}{2\imath}\left(z-z^{-1}\right), \quad dx=\frac{1}{\imath z}dz.$$

于是, 原积分化为

$$I=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\imath}\right)\frac{dz}{\imath z}$$

利用留数定理即可求得.

例题 1.19 求定积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}, \quad |a|<1$$

解 根据上面的方法, 可得

$$\begin{aligned} I&=-\imath\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\left[1+(a/2)\left(z+z^{-1}\right)\right]}\\ &=-\imath\frac{2}{a}\oint\frac{dz}{z^2+(2/a)z+1}.\end{aligned}$$

两个极点分别为

$$z_1=-\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \quad \text{和} \quad z_2=-\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$$

不难看出,z_1 在单位圆外,z_2 在单位圆内. 积分可以写成

$$\oint\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

留数则为 $\frac{1}{z_2-z_1}$, 利用留数定理可得

$$I=-\imath\frac{2}{a}2\pi\imath\frac{1}{z_2-z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

1.5.2.2 积分上下限为 $(-\infty, \infty)$

考虑如下形式的定积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

我们先讨论复变函数 $f(z)$ 在实轴上没有奇点的情况, 有奇点的情况后面讨论. 被积函数在上半平面除有限个奇点外是解析的; 当 z 在上半平面及实轴上 $\to\infty$ 时, $zf(z)$ 一致地 $\to 0$.

取如图所示的上半平面的半径为 R 的半圆路径 ℓ. 路径积分可以写成两部分的和

$$\oint_l f(z)dz=\int_{-R}^{R} f(x)dx+\int_{C_R} f(z)dz. \tag{1.111}$$

根据留数定理, 上式等于 $2\pi\imath\sum_j \operatorname{Res} f(z_j)$. 下面证明上式第二项为零. 一般的对于任意 $\theta_1\le\theta\le\theta_2$, 有 $\lim_{R\to\infty} zf(z)=$

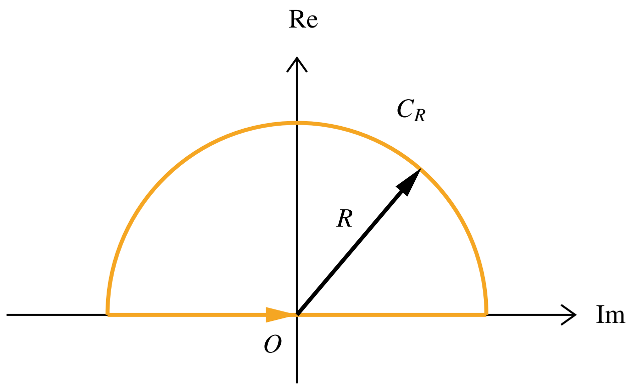

图 1.9: 半圆路径.

0, 可以证明对于该角度对应的圆弧 C 有,

$$\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz = 0. \tag{1.112}$$

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\int_C f(z)dz\right| &\le \int_{\theta_1}^{\theta_2}\lim_{R\to\infty}\left|f\left(Re^{i\theta}\right)iRe^{i\theta}\right|d\theta \\ &\le (\theta_2-\theta_1)\lim_{R\to\infty}\left|f\left(Re^{i\theta}\right)Re^{i\theta}\right| = 0.\end{aligned}$$

也就是说,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi\imath\sum_{z_j\in\text{上半平面}}\mathrm{Res}\ f(z_j), \tag{1.113}$$

例题 1.20 计算

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

解 由 $f(z)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(z-\imath)(z+\imath)}$ 可知其单极点 $\pm\imath$, 其中 $\imath$ 在上半平面.

$$\mathrm{Res}\ f(+\imath)=\frac{1}{2\imath}$$

因此,$I=2\pi\imath\frac{1}{2\imath}=\pi$. 由于该积分是一个常见积分亦可以通过原函数 $\arctan(x)$ 得到. 留数定理的还可以计算这样的积分,

$$I\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

具体求解过程参考梁昆淼数学物理方法的解.

1.5.2.3 带复指数的定积分

考虑以下类型的定积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\imath mx}dx \tag{1.114}$$

其中,m 为正实数;$f(z)$ 在上半平面除有限个奇点外是解析的, 且 $\lim_{|z|\to\infty} f(z)=0, 0\le argz\le\pi$. 我们使用同样的半圆路径, 类似的可以通过留数定理将实轴的积分转换为环路积分求得. 为了使用留数定理, 我们先需要证明在半圆上的路径积分为零, 这里就要用到**约旦引理** (Jordan lemma). 即证明

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{\imath mz}dz=0. \tag{1.115}$$

当 R 足够大时, 我们有 $|f(z)|<\epsilon$. 半圆积分

$$I_R=\int_0^{\pi} f\left(Re^{\imath\theta}\right)e^{\imath mR\cos\theta-mR\sin\theta}\imath Re^{\imath\theta}d\theta \tag{1.116}$$

$$\le \epsilon R\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}d\theta = 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}d\theta, \tag{1.117}$$

可以发现在 $[0,\pi/2]$ 时,

$$\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta, \tag{1.118}$$

于是有

$$I_R\le 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}d\theta = 2\epsilon R\frac{1-e^{-mR}}{2mR/\pi}<\frac{\pi}{m}\epsilon \tag{1.119}$$

即

$$\lim_{R\to\infty} I_R = 0. \tag{1.120}$$

回到定积分 I, 可以得

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\imath mx}dx = 2\pi\imath\sum_{z_j\in\text{上半平面}}\mathrm{Res}\ e^{\imath mz_j}f(z_j) \tag{1.121}$$

对于以下类型的积分, 可以利用上述结论. 如

$$\int_0^\infty f(x)\cos mx dx, \int_0^\infty G(x)\sin mx dx \tag{1.122}$$

其中,$F(z)$ 为偶函数,$G(z)$ 为奇函数, 它们在实轴上没有奇点, 上半平面上除有限个奇点外解析. 很容易通过 $\cos mx = \frac{1}{2}\left(e^{\imath mx} + e^{-\imath mx}\right)$ 等变换得到, 即

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(x)\cos mx dx &= \int_0^\infty F(x)\frac{1}{2}\left(e^{\imath mx} + e^{-\imath mx}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{\imath mx}dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{-\imath mx}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty F(x)e^{\imath mx}dx.\end{aligned}$$

例题 1.21 计算 $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$.

解 偶函数 $F(z)e^{\imath mz} = \frac{1}{z^2+a^2}e^{\imath mz}$ 有两个单极点 $\pm a\imath$, 其中 $+a\imath$ 在上半平面. 而 $e^{\imath mz}/\left(z^2+a^2\right)$ 在单极点 $+a\imath$ 的留数为

$$\lim_{z\to a\imath}\left[(z-a\imath)\frac{e^{\imath mz}}{z^2+a^2}\right] = \lim_{z\to a\imath}\left[\frac{e^{\imath mz}}{z+a\imath}\right] = \frac{e^{-ma}}{2a\imath}$$

应用(1.121),

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx = \pi\imath\frac{e^{-ma}}{2a\imath} = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}.$$

1.6 Feynman 技巧

我们将讨论下面几个计算定积分的技巧.

1.6.1 复变量代换

以一个例子说明复变量代换的方法. 求解定积分

$$I = \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx$$

利用 $\cos bx = \frac{1}{2}\left(e^{\imath bx} + e^{-\imath bx}\right)$

$$\begin{aligned}I =& \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(a-\imath b)x} + e^{-(a+\imath b)x}\right)dx\\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-\imath b} + \frac{1}{a+\imath b}\right)\\ =& \frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

1.6.2 参数微分

求解定积分

$$I = \int_0^\infty xe^{-ax}\cos bx dx$$

我们令

$$S(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx$$

已知 $S(a) = \frac{a}{a^2+b^2}$, 通过对 $S(a)$ 对 a 的求导得到

$$I = -S'(a) = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

对于一般的含参数的微分, 我们有

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f(x,\alpha)dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)dx \\ \left[\frac{dx_2(\alpha)}{d\alpha}\right]f(x_2,\alpha) - \left[\frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha}\right]f(x_1,\alpha) \tag{1.123}$$

1.6.3 被积函数添加函数因子

求解定积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

可以通过乘以一个函数因子 e^{-ax} 来构造参数函数

$$S(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$$

这样我们有

$$S'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx = \frac{1}{1+a^2}$$

对于 $a\to\infty$, 有 $S(\infty)=0$. 而 $\frac{1}{1+x^2}$ 的原函数为 $\arctan x$, 因此

$$S(a) = -\arctan a + C$$

可确定 $C=\frac{\pi}{2}$, 因此我们有 $S(a)=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha$. 因此,

$$I = S(0) = \frac{\pi}{2}.$$

该结果我们已通过留数定理求得.

1.7 积分求解实例

- 计算定积分

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{1}{1+x}dx \quad (0<\alpha<1).$$

将被积函数 $x^{\alpha-1}/(1+x)$ 从实轴延拓到复数 z 平面得到 $f(z)=z^{\alpha-1}/(1+z)$. 由于 $f(z)$ 含有 $z^{\alpha-1}$, 而 α 不是整数, 所以 $f(z)$ 是多值函数, 它有两个支点: 原点和无限远点. z 每绕原点或无限远点一圈, 辐角增加 $2\pi, z^{\alpha-1}$ 多出因子 $e^{\imath 2\pi(\alpha-1)}$ 亦即 $e^{\imath 2\pi\alpha}$, 从而 $f(z)$ 也多出这么一个因子. 从原点沿着正实轴直至无限远作割线.

$$\oint_l f(z)dz = \int_\epsilon^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_R^\epsilon \frac{x^{\alpha-1}e^{\imath 2\pi\alpha}}{1+x}dx + \int_{C_\epsilon} f(z)dz.$$

令 $R\to\infty, \epsilon\to 0$. 上式左边按照留数定理应为 $2\pi i\{f(z)$ 在有限远各奇点留数之和$\}$ 右边第一个积分成为所求的 I, 第三个积分则成为 $-e^{\imath 2\pi\alpha}I$. 可以证明第二个和第四个积分则成为零. 事实上,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz\right| &= \left|\int_{C_R}\frac{z^\alpha}{1+z}\frac{dz}{z}\right| \leqslant \max_{(C_R\text{ 上})}\left|\frac{z^\alpha}{1+z}\right|\frac{\int|dz|}{|z|} \\ &= \max\frac{R^\alpha}{|1+z|}\cdot\frac{2\pi R}{R} = 2\pi\max\frac{R^\alpha}{|1+z|} \\ &\sim 2\pi\frac{1}{R^{1-\alpha}\to 0} \quad (\text{ 于}R\to\infty).\end{aligned}$$

$$\left|\int_{C_\epsilon}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz\right|=\left|\int_{C_\epsilon}\frac{z^\alpha}{1+z}\frac{dz}{z}\right|\leqslant\max_{(C_\epsilon\text{ 上})}\left|\frac{z^\alpha}{1+z}\right|\frac{\int|dz|}{|z|}$$
$$=\max\frac{\epsilon^\alpha}{|1+z|}\cdot\frac{2\pi\epsilon}{\epsilon}=2\pi\max\frac{\epsilon^\alpha}{|1+z|}$$
$$\sim 2\pi\frac{\epsilon^\alpha}{1}\to 0\quad(\text{于}\epsilon\to 0).$$

于是 $\left(1-e^{\imath 2\pi\alpha}\right)I=2\pi\imath\{f(z)$ 在有限远各奇点留数之和 $\}$. $f(z)=z^{\alpha-1}(1+z)^{-1}$ 只有一个单极点 $z_0=-1=e^{\imath\pi}$, 而

$$\operatorname{Res}f(-1)=\lim_{z\to-1}[(z+1)f(z)]=\lim_{z\to-1}\left[z^{\alpha-1}\right]=e^{\imath(\alpha\pi-\pi)}=-e^{\imath\alpha\pi}.$$

因此

$$I=-\frac{2\pi\imath e^{\imath\pi\alpha}}{1-e^{\imath 2\pi\alpha}}=-\frac{2\pi\imath e^{\imath\pi\alpha}}{e^{\imath\pi\alpha}\left(e^{-\imath\pi\alpha}-e^{\imath\pi\alpha}\right)}$$
$$=\frac{2\pi\imath}{\left(e^{-\imath\pi\alpha}-e^{\imath\pi\alpha}\right)}=\frac{2\pi\imath}{2\sin\pi\alpha}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

- 计算菲涅耳积分 (Fresnel integrals)

$$I_1=\int_0^\infty\sin\left(x^2\right)dx\text{ 及}I_2=\int_0^\infty\cos\left(x^2\right)dx.$$

由于 $\sin\left(x^2\right)=\operatorname{Im}e^{\imath x^2}$, 而 $\cos\left(x^2\right)=\operatorname{Re}e^{\imath x^2}$, 所以

$$I_2+\imath I_1=\int_0^\infty e^{\imath x^2}dx.$$

取图 4-10 所示回路 l. 由于 e^{iz^2} 没有有限远奇点, 所以根据留数定理得

$$\oint_l e^{\imath z^2}dz=0,$$

即 $\int_0^R e^{\imath x^2}dx+\int_{C_R}e^{\imath z^2}dz+\int_R^0 e^{\imath\left(\rho e^{\imath\pi/4}\right)^2}d\left(\rho e^{\imath\pi/4}\right)=0$,
令 $R\to\infty$. 第一个积分即所求的 $I_2+\imath I_1$. 第三个积分不难如下算出:

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^0 e^{\imath\left(\rho^2\imath\right)}e^{\imath\pi/4}d\rho=\lim_{R\to\infty}\left(-e^{\imath\pi/4}\right)\int_0^R e^{-\rho^2}d\rho=-e^{\imath\pi/4}\int_0^\infty e^{-\rho^2}d\rho$$
$$=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\imath\pi/4}=-(1+\imath)\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

可以证明第二个积分成为零. 为此, 先作一次分部积分,

$$\int_{C_R}e^{\imath z^2}dz=\left.\frac{e^{\imath z^2}}{2\imath z}\right|_{z=R}^{Re^{\imath\pi/4}}+\int_{C_R}e^{\imath z^2}\frac{dz}{2\imath z^2},$$

其中已积出部分的模

$$\left|\frac{e^{-R^2}}{2\imath Re^{\imath\pi/4}}-\frac{e^{\imath R^2}}{2\imath R}\right|\leqslant\frac{e^{-R^2}}{2R}+\frac{1}{2R}\to 0\quad(\text{于}R\to\infty),$$

未积出部分的模

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{\imath 2^2}}{2\imath z^2}dz\right|=\left|\int_{C_R}\frac{e^{-R^2\sin 2\varphi+\imath^2\cos 2\varphi}}{2\imath R^2e^{\imath 2\varphi}}Re^{\imath\varphi}\imath d\varphi\right|$$
$$\leqslant\int_{C_R}\frac{e^{-R^2\sin 2\varphi}}{2R^2}Rd\varphi\leqslant\max\left(\frac{e^{-R^2\sin 2\varphi}}{2R}\right)\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2R}\frac{\pi}{4}\to 0\quad(\text{于}R\to\infty).$$

于是

$$I_2 + \imath I_1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+\imath) = 0,$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

- 考虑用 Feynman 技巧来计算

$$I = \int_0^1 \frac{x^2-1}{\log x} dx$$

设计这样的函数

$$G(t) := \int_0^1 \frac{x^t-1}{\log x} dx$$

$G(0)=0$, 于是问题变为求 $G(2)$. 不难验证

$$G'(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}$$

对 t 求积分后得到

$$G(2) = \int_0^2 G'(t)dt = \int_0^2 \frac{dt}{t+1} = \log 3.$$

- 考虑用 Feynman 技巧来验证高斯积分:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

定义一个 t 的函数

$$I(t) := \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+(x/t)^2} dx, t > 0.$$

于是菲涅尔积分就是求 $I_1 = I(\infty)$. 做代换 $x/t = y$ 后, 并换回积分变量为 x 有

$$I(t) = t\int_0^\infty \frac{e^{-t^2x^2}}{1+x^2} dx$$

可以得到

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(t)}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

为了能利用上面的技巧, 我们将考虑

$$e^{-t^2} I(t) = t\int_0^\infty \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

对于

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-1}e^{-t^2}I(t)\right) = \int_0^\infty -2te^{-t^2(1+x^2)}dx = -2e^{-t^2}\int_0^\infty e^{-u^2}du = -2e^{-t^2}I(\infty)$$

两边积分

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(t^{-1}e^{-t^2}I(t)\right)dt}_{=-\lim_{t\to 0}\frac{I(t)}{t}} = \underbrace{\int_0^\infty -2e^{-t^2}I(\infty)dt}_{=-2I(\infty)^2}$$

得到

$$I(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$