

## 1.2.6 多值函数

在定义解析函数的时候, 其中一个条件就是要求函数为单值的. 然而除了单值函数外, 还有许许多多值函数, 例如对数函数和根式函数等. 碰巧的是, 解析函数的许多性质仍然可以应用到多值函数上, 但前提是要到多值函数的支点 (branch points).

一般来说, 多值函数  $f(z)$ , 若  $z$  绕某点一周,  $f(z)$  不会返回原值, 我们称该点为多值函数的支点. 若  $z$  绕该支点  $n$  周,  $f(z)$  复原, 则称该点为多值函数  $f(z)$  的  $n$  阶支点. 以  $f(z) = z^{1/2}$  为例, 我们来介绍多值函数的性质.


易知,

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{1}{2}\text{Arg } z} = \sqrt{r}e^{i(\frac{1}{2}\arg z + n\pi)},$$

于是, 对于  $n = 2k$  和  $n = 2k + 1$ ,  $f(z)$  有两个值.

$$\begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i(\arg z)/2} \\ f_2(z) = -\sqrt{r}e^{i(\arg z)/2} \end{cases} \quad (1.66)$$

这两个函数成为  $f(z) = z^{1/2}$  的两个单值分支. 可以发现, 取任意包含  $z = 0$  的闭合路径 (或围道)  $C$ , 沿着该路径绕行一圈, 辐角增加  $2\pi$ , 可以发现  $f(z)$  从其一单值分支  $f_1(z)$  进入到另一单值分支  $f_2(z)$ . 若绕行两周, 则回归原分支  $f_1(z)$ . 根据定义, 可知  $z = 0$  为该函数的支点, 且为 2 阶支点.

 **笔记** 注意这与梁昆森的说法不同.

此外, 利用变换  $z = 1/t$ , 可以发现  $z = \infty$  也是 2 阶支点.

为了能够像对待单值函数一样对待多值函数, 我们需要定义复平面 Argand diagram 中的割线 (branch cut). 割线可以被认为复平面里一个人为设定的不可穿过的壁垒. 割线的存在, 使得我们能够避免形成一个包含支点的闭合路径, 这样一来, 在割线之间多值函数仍然是单值的.

对于  $f(z) = z^{1/2}$ , 可以取任意一条过  $z = 0$  的指向  $|z| = \infty$  的割线, 使得无法形成包含  $z = 0$  支点的闭合路径. 按照约定, 我们通常沿着实轴或者虚轴取这样的割线. 由于割线的存在, 辐角被限制在  $(0, 2\pi)$ , 因而  $f(z)$  保持单值. 割线的取法多种多样, 正确连接各支点, 同时规定辐角的值即可.

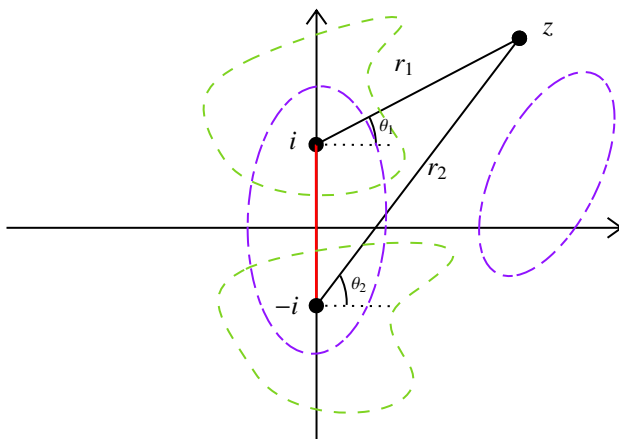


图 1.6: 对函数  $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$  的路径选取和割线示意图.

**例题 1.8** 找出函数  $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$  的支点, 并取合适的割线.

**解** 不难看出,

$$f(z) = \sqrt{z+i}\sqrt{z-i}.$$

前面我们了解了  $f(z) = \sqrt{z}$  的支点为  $z = 0$ , 不难看出,  $z = \pm i$  也会成为该函数的两个支点. 如图 1.6 所示, 令

$$z - i = r_1 e^{i\theta_1} \quad z + i = r_2 e^{i\theta_2}$$

我们有

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}.$$

如果我们做以下几种情况的闭合路径  $C$ , 我们会得到不同的情况. 若  $C$

- (i) 不包含两个支点, 那么  $\theta_1 \rightarrow \theta_1, \theta_2 \rightarrow \theta_2$ , 于是  $f(z) \rightarrow f(z)$ ;
- (ii) 包含  $i$  但不含  $-i$ , 那么  $\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi, \theta_2 \rightarrow \theta_2$ , 于是  $f(z) \rightarrow -f(z)$ ;
- (iii) 包含  $-i$  但不含  $i$ , 那么  $\theta_1 \rightarrow \theta_1, \theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi$ , 于是  $f(z) \rightarrow -f(z)$ ;
- (iv) 包含  $\pm i$  两个支点, 那么  $\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi, \theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi$ , 于是  $f(z) \rightarrow f(z)$ .

因此, 为了阻止闭合路径绕支点完成完整的回路, 我们必须选择合适的割线. 图中连接  $\pm i$  的标红线段是一种选择.

## 1.3 复变函数积分

### 1.3.1 复变函数的积分

有了复变函数微分的基础, 我们现在来讨论积分. 复变函数的积分的定义可以同实变函数积分的类比得到. 在复平面上取一个路径  $\ell$ , 起终点为  $A(z_0), B(z_n)$ , 沿着该路径定义了一连续函数  $f(z)$ , 用  $n-1$  个点  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  将该路径  $\ell$  分成  $n$  个线段 (见图1.7). 函数  $f(z)$  在线段  $z_{k-1} \rightarrow z_k$  上任意一点  $\xi_k$  的值乘上线段的长度  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$  并求和, 即

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}). \quad (1.67)$$

当  $n \rightarrow \infty$ , 求和则转化为积分. 当这个和的极限存在且与  $\xi_k$  的选取无关时, 这个极限称为函数  $f(z)$  沿着路径  $\ell$

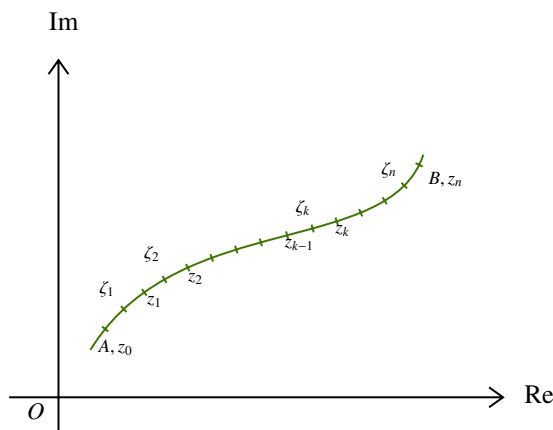


图 1.7: 复变函数积分示意图. 光滑曲线  $\ell$  上取一系列点  $z_k$  将其分成  $n$  小段.

的**路径积分** (Contour integral), 记作  $\int_{\ell} f(z)dz$ , 即

$$\int_{\ell} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}). \quad (1.68)$$

其实, 我们还可以将该定义用实虚部的方式表达出来,

$$\int_{\ell} f(z)dz = \int_{\ell} (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) \quad (1.69)$$

$$= \int_{\ell} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{\ell} (v(x, y)dx + u(x, y)dy) \quad (1.70)$$

这样一来, 复变函数的路径积分就转化成了两个实变函数的线积分. 因此, 很多实函数线积分的性质可以应用在复变函数路径积分上.

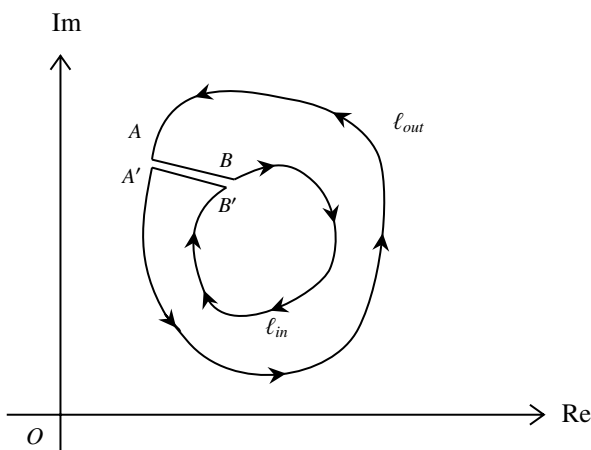


图 1.8: 复杂路径示意图.

### 1.3.2 柯西积分定理

柯西积分定理 (简称柯西定理) 说的是, 如果  $f(z)$  是解析函数,  $f'(z)$  在闭合路径  $C$  区域内任一点连续, 有

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (1.71)$$

所有的闭合回路的积分我们用  $\oint$  来表示. 证明会用到格林公式和柯西-黎曼条件, 具体参考其他书目, 其中格林公式为

$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (1.72)$$

对于某些区域有奇点的情况, 我们可以取一绕过奇点的闭合路径, 如图1.8所示的情况. 柯西定理重要的应用在于将沿某一路径积分转化为另一个或多个路径积分的求和. 通常这样来规定正方向, 当观察者沿着该方向前进时, 区域总是在观察者的左侧. 由于  $\ell_{in}$  和  $\ell_{out}$  与割线  $AB, A'B'$  组成了闭合回路, 根据柯西定理, 我们有

$$\left[ \oint_{\ell_{out}} + \int_{\ell_{AB}} + \oint_{\ell_{in}} + \int_{\ell_{B'A'}} \right] f(z)dz = 0.$$

由于割线  $AB$  与  $A'B'$  可以无限接近, 可以看出二者方向相反, 这两项互相抵消. 于是我们有

$$\left[ \oint_{\ell_{out}} + \oint_{\ell_{in}} \right] f(z)dz = 0,$$

即

$$\oint_{\ell_{out}} f(z)dz = - \oint_{\ell_{in}} f(z)dz.$$

若用逆时针方向积分表示, 并考虑多个内边界  $\ell_i$ , 我们有

$$\oint_{\ell_{out}} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \oint_{\ell_{in}} f(z)dz. \quad (1.73)$$

就是说, 外边界逆时针方向积分等于所有内边界逆时针方向积分之和. 只要积分起点和终点固定, 当积分路径连续变形时 (即不跳过奇点), 函数的积分值不变.

下面给出一个重要的例题.

#### 例题 1.9 计算积分

$$I = \oint_{\ell} (z - \alpha)^n dz,$$

其中  $n$  为整数.

**解** 首先, 有柯西定理易知, 若回路  $\ell$  不包含  $\alpha$ , 则被积函数在  $\ell$  所围区域上是解析的, 故积分值为零. 下面讨论  $\ell$  包围  $\alpha$  的情形. 如果  $n \geq 0$ , 被积函数在  $\ell$  所围区域是解析的, 积分为零. 若  $n < 0$ , 则有一个奇点  $\alpha$ . 取以  $\alpha$  为圆

心半径为  $R$  的圆周  $C$ ,  $R$  大小任意. 于是圆周上有  $z - \alpha = Re^{i\theta}$ .

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (z - \alpha)^n dz \\ &= \oint_C R^n e^{in\theta} d(\alpha + Re^{i\theta}) \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= 0 \quad \text{if } n \neq -1. \end{aligned}$$

当  $n = -1$  时,  $I = 2\pi i$ . 其实, 从原函数的角度来看, 这个结果很容易理解. 当  $n \neq -1$ , 原函数为  $(z - \alpha)^{n+1}/(n+1)$ , 绕  $\alpha$  一周原函数变化量为零. 而当  $n = -1$  时, 原函数为  $\ln(z - \alpha)$ , 绕一周变化量为  $2\pi i$ . 因此我们得到了非常重要的表达式

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = \begin{cases} 0 & (l \text{ 不包围 } \alpha), \\ 1 & (l \text{ 包围 } \alpha). \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_l (z - \alpha)^n dz = 0 \quad (n \neq -1).$$

### 1.3.3 柯西积分公式

复变函数理论中最重要的一个公式是柯西积分公式. 若  $f(z)$  在一闭合回路围成的区域内解析,  $z_0$  为区域内一点, 则有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.74)$$

柯西公式将解析函数在任何一内点  $z_0$  的值  $f(z_0)$  用沿边界线  $l$  的回路积分表示了出来. 也就是说, 一个解析函数在闭合回路  $C$  内任意点  $z_0$  的值完全由该路径上的值决定的. 这看起来不可思议, 但又是必然结果. 从物理上说, 解析函数紧密联系于平面标量场, 而平面场的边界条件决定着区域内部的场. 我们可以通过前面提到的柯西定理来证明. 我们需要围绕  $z_0$  选取一个半径为  $r$  的内圆  $\gamma$ , 由于  $f(z)/(z - z_0)$  在内圆与  $C$  形成的区域解析, 故我们有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

有  $z - z_0 = re^{i\theta}$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned} \quad (1.75)$$

现今内圆半径  $r \rightarrow 0$ , 则有  $I \rightarrow 2\pi i f(z_0)$ , 得证. 由于  $z_0$  的任意性, 我们可以改写成  $z$ , 而把积分变量改成  $\zeta$ , 则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.76)$$

对柯西公式(1.76)求导, 我们有

$$f'(z) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (1.77)$$

反复求导则有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (1.78)$$

下面介绍柯西公式的重要推论.

**模数原理**  $f(z)$  在闭区域上解析,  $|f(z)|$  只能在边界线上取极大值.

由  $f(z)^n = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(\zeta)^n}{\zeta-z} d\zeta$ , 若  $|f(\zeta)|$  在  $C$  上极大值为  $M$ ,  $|\zeta-z|$  的极小值为  $\delta$ ,  $C$  的长度为  $s$ , 则

$$|f(z)|^n \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{\delta} s,$$

即

$$|f(z)| \leq M \left( \frac{s}{2\pi\delta} \right)^{\frac{1}{n}},$$

令  $n \rightarrow \infty, |f(z)| \leq M$ . 证毕.

**刘维尔 (Liouville) 定理** 如  $f(z)$  在全平面上解析且有界, 则  $f(z)$  必为常数.

**证**  $f$  有界, 即  $|f(z)| \leq N$ , 对  $f'(z)$  取模, 取以  $z$  为圆心半径为  $R$  的圆周, 可得

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{N}{R^2} 2\pi R = \frac{N}{R},$$

由于  $R$  任意选定, 令  $R \rightarrow \infty$ , 有  $f'(z) \equiv 0$ , 所以  $f(z)$  为常数.

刘维尔定理的一个应用是可以证明代数基本定理, 即对任意  $n$  阶多项式 (Polynomial)

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (n > 0, a_n \neq 0) \quad (1.79)$$

有  $n$  个根满足  $P(z) = 0$ . 它的证明可以通过反证的方法. 假设  $P(z)$  没有零点, 即  $P(z) \neq 0$ , 则  $1/P(z)$  是解析且有界的, 根据刘维尔定理可知  $1/P(z)$  为常数, 即  $P(z)$  为常数, 与  $a_n \neq 0$  矛盾. 可以知道,  $P(z)$  至少有一个根, 记为  $\lambda_1$ , 那么对  $P(z)/(z - \lambda_1)$  这一  $n-1$  阶多项式进行上述论证, 我们可以降次直至一阶多项式, 共计  $n$  个根, 因此  $n$  阶多项式有  $n$  个根.

## 1.4 复数级数

### 1.4.1 级数的基本性质

物理学和工程学中的一些函数常常可以用无穷级数来表示. 一个很有用的例子,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}. \quad (1.80)$$

有了该式, 我们可以处理更复杂的级数, 如

$$1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + a^3 \cos 3\theta + \dots = ? \quad (1.81)$$

有了前面的复数概念, 我们有

$$\cos \theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \quad (1.82)$$

于是,

$$\begin{aligned} & 1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + a^3 \cos 3\theta + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} a e^{i\theta} + \frac{1}{2} a e^{-i\theta} + \frac{1}{2} a^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{2} a^2 e^{-2i\theta} + \dots \\ &= \frac{1}{2} (1 + a e^{i\theta} + a^2 e^{2i\theta} + \dots) + \frac{1}{2} (1 + a e^{-i\theta} + a^2 e^{-2i\theta} + \dots) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - a e^{i\theta}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - a e^{-i\theta}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - a \cos \theta + i a \sin \theta}{(1 - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2} + \frac{1 - a \cos \theta - i a \sin \theta}{(1 - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2} \right] \\ &= \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}. \end{aligned}$$

现在我们要处理一个稍微复杂的级数,

$$S(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \quad (1.83)$$

为了将上式化简, 我们需要把它转换成一个我们熟知的形式. 由于分母比较特殊, 我们想办法摆脱这些数字. 为此, 我们对  $xS(x)$  求导, 得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(xS(x)) &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{1+x}\end{aligned}\quad (1.84)$$

于是我们有  $xS(x) = \ln(1+x) + C$ . 当  $x=0$ ,  $S(x)=1$ ,  $\ln(1+x)=0$ , 有  $C=0$ . 最终我们得到了

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.\quad (1.85)$$

我们还可以利用指数的级数表示

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\quad (1.86)$$

来求解正余弦函数的级数表示.

1. 几何级数:  $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ , 收敛于  $\frac{1}{1-x}$ .
2. 调和级数:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , 发散.

值得注意的是, 以上的求和表示实际上假定了  $|x| < 1$  这个条件. 容易验证,  $|x| \geq 1$ , 级数是发散的.

随着  $n \rightarrow \infty$ , 部分和趋于一个定值  $S$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S,\quad (1.87)$$

我们称无穷级数  $\sum_{k=1}^n a_k$  **收敛** 并趋于  $S$ . 如果级数的求和趋于  $\pm\infty$ , 级数**发散**. 对于如

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \cdots\quad (1.88)$$

这样的级数取值在  $0, 1$  之间振荡, 我们也称其发散. 级数收敛的必要条件很显然是  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . 对于级数是否收敛, 在什么条件下收敛显得十分重要. 对级数收敛的充分条件寻找, 派生出了各种各样的判据.

一般的, 我们将复数的概念拓展到级数,

$$s_n = \sum_{k=1}^n w_k\quad (1.89)$$

若级数通项每一个都是函数形式  $w_k(z)$ , 我们称之为**函数项级数**. 对于函数项级数, 我们记部分和  $s_n(z)$  的极限为

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z).\quad (1.90)$$

如果函数项级数  $\sum w_k(z)$  在某个区域  $B$  上所有的点, 级数都收敛, 则称级数在  $B$  上收敛. 应用柯西判据, 级数在  $B$  上收敛的充分必要条件是, 在  $B$  上各点  $z$ , 对于任一给定的小正数  $\epsilon$ , 必有  $N(z)$  存在, 使得当  $n > N(z)$  时,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z) \right| < \epsilon,$$

式中  $p$  为任意正整数. 若  $N$  跟  $z$  无关, 则称级数在  $B$  上**一致收敛**. 对于一致收敛的级数, 可以逐项求极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} w_k(z)$$

求导

$$S'(z) = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z) \right]' = \sum_{k=1}^{\infty} w_k'(z),$$

和积分

$$\int_l S(z) dz = \int_l \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_l w_k(z) dz.$$

## 1.4.2 级数的收敛判定法

### 1.4.2.1 柯西判据

柯西判据 (Cauchy criterion) 说的是, 对于  $\epsilon > 0$ , 总存在固定的  $N$  使得  $|s_j - s_i| < \epsilon$ , 其中  $i, j$  是任意大于  $N$  的整数. 也就是说, 若  $j > i$ ,

$$|w_{i+1} + w_{i+2} + \cdots + w_j| < \epsilon, \quad (1.91)$$

直观地理解, 也就是说某项以后的所有求和可以忽略不计, 即部分求和趋于某一值, 级数收敛. 对于复数项级数, 一样成立. 如果将复数项级数的每一项都取模组成新的级数, 记为

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{u_k^2 + v_k^2}, \quad (1.92)$$

若该级数收敛, 则称原级数**绝对收敛**. 绝对收敛的级数必然是收敛的. 如果级数收敛, 但非绝对收敛, 那么我们称它为**条件收敛**.

### 1.4.2.2 比较判定法

如果我们有某一已知正项级数  $\sum_k a_k$  收敛, 若级数的每一项都满足  $0 \leq w_k \leq a_k$ , 那么可以判定  $\sum_k w_k$  收敛. 这可以利用柯西判据进行证明. 相反的, 若同发散级数  $\sum_k a_k$  比较,  $0 \leq a_k \leq w_k$ , 那么可以判定  $\sum_k w_k$  发散. 对于复数项级数, 比较判据可以表示为  $0 \leq |w_k| \leq a_k$ .

**例题 1.10** 试判定级数  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$ ,  $p \leq 1$  收敛还是发散.

**解** 已知调和级数  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  是发散的, 而  $k^{-p} > k^{-1}$ , 根据比较判定法, 可知该级数发散.

### 1.4.2.3 达朗贝尔判据

达朗贝尔方法又称比值判定法 (D'Alembert Ratio Criterion). 若任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  通项满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = q,$$

1. 当  $q < 1$  时, 级数绝对收敛;
2. 当  $q > 1$  时, 级数发散;
3. 当  $q = 1$  时, 此方法无效, 需要其他方法判定.

**例题 1.11** 试判断级数  $\sum_{k=1}^{\infty} k/2^k$  的收敛性.

**解** 利用比值判定法

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{w_{k+1}}{w_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} / \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

可见该级数是收敛的.

### 1.4.2.4 根式判别法

对极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{w_k} = r,$$

若  $r < 1$  则级数收敛, 若  $r \geq 1$ , 则级数发散. 证明可以通过对通项取  $n$  次幂, 通过比较判别法确定.

### 1.4.2.5 莱布尼兹判据 (Leibniz Criterion)

此外, 还有很多其他判定方法, 对于交错级数可以利用莱布尼兹判据 (Leibniz Criterion). 交错级数的形式为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} w_n$ ,  $w_n > 0$ . 莱布尼兹判据说的是对于交错级数通项  $w_n$  单调递减且极限为零, 则级数收敛.

试着自己验证一下交错调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots \quad (1.93)$$

是条件收敛的.

### 1.4.3 幂级数 (Power Series)

本讲专门讨论在函数项级数中非常重要的一类级数, 叫做幂级数. 幂级数的各项都是幂函数,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad (1.94)$$

其中  $z_0, a_i$  都是复常数. 这样的级数称为以  $z_0$  为中心的幂级数. 该幂级数可能收敛, 也可能发散. 如果幂级数是收敛的, 称  $z$  为该级数的**收敛点**; 反之若它是发散的, 称  $z$  为该级数的**发散点**. 函数项级数式的所有收敛点的集合称为其**收敛域**, 所有发散点的集合称为其**发散域**.

现在利用达朗贝尔比值判定法, 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}| |z - z_0|^{k+1}}{|a_k| |z - z_0|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |z - z_0| < 1 \quad (1.95)$$

则级数绝对收敛. 若记

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R, \quad (1.96)$$

那么当  $|z - z_0| < R$  时, 级数绝对收敛. 若  $|z - z_0| > R$  时, 级数的模越来越大, 级数发散. 对于  $|z - z_0| = R$  的时候, 无法简单判定. 例如幂级数  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} |z - z_0|^k$ , 可知  $R = 1, |z - z_0| = 1$  有两种情况: 当  $z - z_0 = +1$  时, 由调和级数知道, 该级数发散; 而当  $z - z_0 = -1$  时, 由莱布尼兹判定法可知该级数收敛. 对于有些幂级数, 根式判别法的使用有时更加简便, 应当在这两种方法灵活选择. 根式判别法的收敛半径可由

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad (1.97)$$

得到.

以  $z_0$  为圆心作一个半径为  $R$  的圆  $C_R$ . 幂级数在圆的内部绝对收敛, 在圆外发散. 这个圆因而称为幂级数的**收敛圆**, 它的半径则称为**收敛半径**. 至于在收敛圆周上的收敛情况则需要具体分析.

**例题 1.12** 求幂级数  $1 - z^2 + z^4 - z^6 \cdots$  的收敛圆,  $z$  为复变数.

**解** 将  $z^2$  记作  $t$ , 则本例的级数化成  $1 - t + t^2 - t^3 \cdots$ . 系数  $a_k = (-1)^k$ , 因此  $t$  平面上收敛半径  $R = 1$ .  $z$  平面上以  $z = 0$  为圆心, 收敛半径为  $\sqrt{R} = 1$ .

### 1.4.4 泰勒级数 (Taylor Series) 和洛朗级数 (Laurent Series)

同实变函数泰勒级数展开一样, 复变函数中解析函数自然也可以展为复变项的**泰勒级数** (Taylor series). 若  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心半径为  $R$  的圆  $C_R$  内 (含圆上) 解析, 对圆内任意  $z, f(z)$  可以展为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1.98)$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad (1.99)$$

且该展开唯一.

以上的证明如下. 利用  $1/(\zeta - z)$  围绕  $z_0$  为圆心的几何级数, 构造

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$