1. 设 $\Psi(t,x)=e^{\left(2tx-t^2\right)}$, t 是复变数, 试证:

$$\left.\frac{\partial^n\Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

提示: 对回路积分进行积分变数的代换 $\xi=z-x$.

2. 根据模最大原理, 求 $|\sin z|$ 在闭区域 $0\le\Re z\le 2\pi, 0\le\Im z\le 2\pi$ 中的最大值.

3. $f(z)$ 在全平面解析, 且 $|f(z)|\ge 1$, 用 Liouville 定理证明 $f(z)$ 为常数.
提示: 考虑 $F(z)=\frac{1}{f(z)}$.

4. 设 $f(z)$ 在区域 B 内解析, C 为 B 内任一简单闭曲线, 证明对于 B 内, 但不在 C 上的任一点 z,

$$\oint_C\frac{f'(\xi)}{\xi-z}d\xi=\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi.$$

5. 计算:

- (i) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}$; (ii) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}$; (iii) $\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{z}$; (iv) $\int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|$.
- $\oint_C\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz, C$ 分别为
  (i) $|z|=\frac{1}{2}$, (ii) $|z-1|=1$, (iii) $|z|=3$.

6. 判断下列级数的收敛性及绝对收敛性:

(1) $\sum\frac{i^n}{\ln n}$;

(2) $\sum\frac{i^n}{n}$;

(3) 交错调和级数 (除此之外，求其值).

7. 确定下列级数的收敛半径（或收敛区域):

(1) $\sum z^n$;

(2) $\sum\frac{1}{2^n n^n}z^n$;

(3) $\sum\frac{n!}{n^n}z^n$;

(4) $\sum n^{\ln n}z^n$;

(5) $\sum 2^n\sin\frac{z}{3^n}$;

(6) $\sum\frac{\ln(n^n)}{n!}z^n$.