1. 证明

$$|\sinh y| \leq |\sin(x+\imath y)| \leq |\cosh y|.$$

提示: $\cosh^2 x = 1+\sinh^2 x$.

2. 求解方程

$$2\cosh^2 z - 3\cosh z + 1 = 0.$$

3. 验证解析函数的实部和虚部满足二维拉普拉斯方程. 若将解析函数 $f(z)$ 写成极坐标的形式 $f(z) = R(r,\theta)e^{\imath\Theta(r,\theta)}$, 验证

- $\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$,
- $\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta} = -R\frac{\partial \Theta}{\partial r}$.

4. 若将复变函数 $f(z) = u + \imath v$ 看成是 x, y 的二元函数. 再看成是 $z = x + \imath y, z^* = x - \imath y$, 的二元函数, 试证明 Cauchy-Riemann 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0.$$

提示: 利用 $x = (z+z^*)/2, y = (z-z^*)/(2\imath)$.

5. 证明: 若函数 $f(z)$ 在区域 B 内解析, 其模为一常数, 则函数 $f(z)$ 本身也必为一常数.

6. 若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $z=a$ 点解析, 且 $f(a) = g(a) = 0$, 而 $g'(a) \neq 0$, 试证:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

7. 找出下列函数的支点, 并讨论 z 绕各支点一周回到原处函数值的变化.

(1) $\sqrt[3]{1-z^3}$,

(2) $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$,

(3) $\ln(z^2+1)$.

8. 验证

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+z} = 0,$$

路径 C 由 $|z| = R > 1$ 确定的圆.

提示: 直接应用柯西定理是错误的, 需要分解因式裂项.